9 класс

Задача 1. Два осколка. Небольшую петарду подвесили на нити на высоте H над горизонтальной поверхностью. В результате взрыва она распался на два осколка, которые полетели в противоположные стороны с одинаковыми начальными скоростями υ_0, направленными вдоль одной прямой. Какое наибольшее расстояние L может оказаться между осколками после их падения? С места падения осколки не смещаются

Возможное решение (1). (Слободянин В.). Пусть первый осколок имел проекцию скорости на вертикальную ось $\upsilon_{y,0}$, а на горизонтальную ось $\upsilon_{x,0}=\sqrt{\upsilon_0^2-\upsilon_{y,0}^2}$ и летел до падения в течение времени t_1. Тогда второй осколок имел проекцию скорости на вертикальную ось $-\upsilon_{y,0}$, а на горизонтальную ось $-\upsilon_{x,0}=-\sqrt{\upsilon_0^2-\upsilon_{y,0}^2}$ и летел до падения в течение времени t_2.

Расстояние между упавшими осколками $L=\upsilon_{x,0}\left(t_1+t_2\right)$.

Из кинематических соотношений (в проекции на вертикальную ось) получим два квадратных (относительно времени) уравнения:

$$1)\ H+\upsilon_{y,0}t_1-\frac{gt_1^2}{2}=0; \qquad 2)\ H-\upsilon_{y,0}t_2-\frac{gt_2^2}{2}=0.$$

Их корни равны: $3)\ t_1=\frac{\upsilon_{y,0}}{g}+\sqrt{\left(\frac{\upsilon_{y,0}}{g}\right)^2+\frac{2H}{g}};\ 4)\ t_2=-\frac{\upsilon_{y,0}}{g}+\sqrt{\left(\frac{\upsilon_{y,0}}{g}\right)^2+\frac{2H}{g}}.$

Отсюда

$$5)\ L=2\upsilon_{x,0}\sqrt{\left(\frac{\upsilon_{y,0}}{g}\right)^2+\frac{2H}{g}}=2\sqrt{\upsilon_0^2-\upsilon_{y,0}^2}\sqrt{\left(\frac{\upsilon_{y,0}}{g}\right)^2+\frac{2H}{g}}=\frac{2}{g}\sqrt{\upsilon_0^2-\upsilon_{y,0}^2}\sqrt{\upsilon_{y,0}^2+2gH}.$$

Возведём в квадрат это уравнение и приведём подобные:

$$6)\ \upsilon_{y,0}^4+\left(2gH-\upsilon_0^2\right)\upsilon_{y,0}^2+\left(\frac{gL}{2}\right)^2-2gH\upsilon_0^2=0.$$

Это биквадратное уравнение дискриминант которого

$$D=\left(gH-\frac{\upsilon_0^2}{2}\right)^2-\left(\frac{gL}{2}\right)^2+2gH\upsilon_0^2$$

равен нулю тогда, когда расстояние L достигнет максимума. Следовательно,

$$L_{\max}=2H+\frac{\upsilon_0^2}{g}.$$

Примечание. В уравнении (5): $L=\frac{2}{g}\sqrt{(V_0^2-V_{0y}^2)(V_{0y}^2+2gH)}$ выражение под корнем – перевёрнутая парабола, которая принимает наибольшее значение строго посредине между корнями V_0^2 и $\left(-2gH\right)$. При этом сомножители под радикалом равны. Отсюда

$$L = \frac{2}{g} 0{,}5 \cdot \left(V_0^2 + 2gH\right) = \frac{V_0^2}{g} + 2H$$

Возможное решение (2). 1) Из закона сохранения механической энергии следует, что на землю осколки упадут с одинаковой скорость υ_1:

$$m\frac{\upsilon_1^2}{2} = mgH + m\frac{\upsilon_0^2}{2}.$$

При этом сумма траекторий их полёта будет представлять траекторию полёта тела, брошенного с начальной скоростью υ_1.

2) Дальность полёта тела, брошенного под углом 45^0 к горизонту максимальна и равна

$$L = \frac{\upsilon_1^2}{g}$$

(начальная и конечная точки траектории лежат на одной высоте).

Решая совместно полученные уравнения, найдём:

$$L_{\max} = 2H + \frac{\upsilon_0^2}{g}.$$

Примечание: Если $\upsilon_0^2 = 2gH$, то сразу после распада шара его осколки должны полететь горизонтально и $L_{\max} = 4H$.

Критерии оценивания

Для решения (1)

1)	Записано выражение для $\upsilon_{x,0}$ через $\upsilon_{y,0}^2$ обоих осколков	**1 балл**
2)	Дано выражение $L = \upsilon_{x,0}\left(t_1 + t_2\right)$ для расстояния между упавшими осколками	**1 балл**
3)	Записаны уравнения (1) и (2) для нахождения времён	**2 балла**
4)	Решены уравнения (1) и (2) относительно времён t_1 и t_2	**2 балла**
5)	Получено уравнение (5)	**2 балла**
6)	Найдена максимальная дальность разлёта осколков	**2 балла**

Для решения (2)

1)	Отмечено, что на землю осколки упадут с одинаковой скоростью	**2 балла**
2)	Отмечено, что сумма траекторий их полёта будет представлять траекторию полёта тела, брошенного с начальной скоростью υ_1.	**2 балла**
3)	Записан закон сохранений механической энергии	**4 балла**
4)	$L_{\max}$ выражена через υ_1	**2 балла**
5)	Получено окончательное выражение для $L_{\max}$	**2 балла**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Задача 2. Шарик на нитях. Небольшой шарик массой m движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса R = 25,0 см вокруг вертикальной оси. Шарик удерживают две нити (рис. 1), составляющие с осью вращения углы α = 30° и β = 60°. Найдите значения угловой скорости ω при которых силы натяжения нитей отличаются в 2 раза. Ускорение свободного падения g = 9,81 м/с^2.

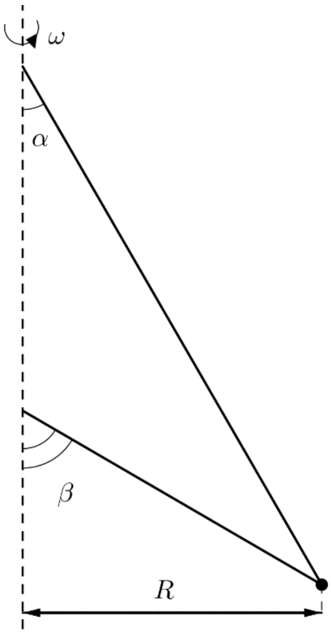

Рис. 1

Возможное решение (Варламов С.).

А) Пусть верхняя нить натянута сильнее. Тогда:

1) $m\omega^2 R = 2T\sin\alpha + T\sin\beta;$

2) $mg - 2T\cos\alpha - T\cos\beta = 0.$

Решая эту систему уравнений получим:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{2\sin\alpha+\sin\beta}{2\cos\alpha+\cos\beta}} \approx 0{,}914\sqrt{\frac{g}{R}} \approx 5{,}7\ \text{с}^{-1}.$$

Б) Пусть теперь нижняя нить натянута сильнее. Тогда:

1) $m\omega^2 R = T\sin\alpha + 2T\sin\beta;$

2) $mg - T\cos\alpha - 2T\cos\beta = 0.$

Решая эту систему уравнений получим:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{\sin\alpha+2\sin\beta}{\cos\alpha+2\cos\beta}} \approx 1{,}09\sqrt{\frac{g}{R}} \approx 6{,}8\ \text{с}^{-1}.$$

Критерии оценивания

1)	Записана система уравнений для случая (А) (по 1,5 балла)	**3 балла**
2)	Решена система уравнений	**1 балл**
3)	Получен численный ответ	**1 балл**
4)	Записана система уравнений для случая (Б) (по 1,5 балла)	**3 балла**
5)	Решена система уравнений	**1 балл**
6)	Получен численный ответ	**1 балл**

Задача 3. Два шарика на нитях. Легкий цилиндрический сосуд с жидкостью стоит на двух симметричных опорах. Над одной из них внутри сосуда привязан к дну полностью погруженный в жидкость поплавок объемом V = 10 см^3 и плотностью ρ = 500 кг/м^3. Над другой опорой висит привязанный снаружи шарик такого же объема V и плотностью 3ρ (рис. 1). Плотность жидкости в сосуде равна ρ_0 = 1 200 кг/м^3. Найдите модуль разности сил реакции опор. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

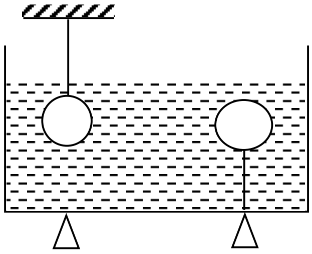

Рис. 1

Возможное решение (Замятнин М.). Расставим силы, действующие на сосуд: F – сила давления на дно, действующая со стороны воды, T – сила натяжения нити, N_1 и N_2 – силы реакций опор (рис. 2).

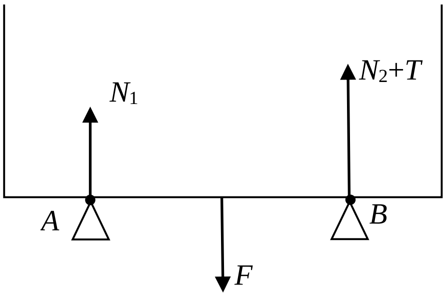

Рис. 2

Запишем правило моментов относительно полюса A:

$$(N_2+T)2l = Fl.$$

Запишем правило моментов относительно полюса B:

$$N_1 2l = Fl.$$

$F = \rho_0 gHS = \rho_0 g\left(\dfrac{m}{\rho_0}+2V\right)$, где H - уровень воды в сосуде, S – площадь дна сосуда, m – масса воды в сосуде.

Запишем условие равновесия для шарика: $T + \rho Vg = \rho_0 Vg$.

Решая систему, получим:

$$N_1 = \frac{mg + 2\rho_0 Vg}{2},$$

$$N_2 = \frac{mg + 2\rho Vg}{2}.$$

$$N_1 - N_2 = (\rho_0 - \rho)Vg = 70 \text{ мН}.$$

Критерии оценивания

1)	Записано правило моментов относительно полюса (*А*)	**1 балл**
2)	Записано правило моментов относительно полюса (*Б*)	**1 балл**
3)	Записано условие равновесия для правого шарика	**1 балла**
4)	Получено выражение для силы F	**2 балла**
5)	Найдена реакция опоры N_1	**2 балла**
6)	Найдена реакция опоры N_2	**2 балла**
7)	Получен ответ	**1 балл**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Задача 4. Архимед и температура. Плоская льдинка плавает в сосуде с водой, имеющей температуру $t_0 = 0\,^{\circ}C$. Минимальная масса груза, который необходимо положить на льдинку, чтобы она полностью погрузилась в воду, равна m_1 = 100 г. Если эту льдинку охладить до температуры t_1 и снова положить в тот же сосуд с водой, по-прежнему находящий температуру t_0, то после установления теплового равновесия для полного погружения льдинки в воду на неё необходимо будет положить груз минимальной массы m_2 = 110 г. Определите температуру t_1?

Возможное решение. (Кармазин С.). Пусть $M_о$ – начальная масса льдинки, а M_1 – масса льдинки после ее охлаждения и повторного погружения в жидкость. Охлажденная льдинка в сосуде с водой нагревается до $t = 0^{\circ}$С за счет теплоты, выделяющейся при намерзании на нее массы льда $\Delta M = M_1 - M_0$. Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$C_л M_о(0 - (-t_1)) = \lambda \Delta M. \qquad (1)$$

Условие плавания льдинки в первом случае

$$M_о + m_1 = \rho_в(M_о/\rho_л) \qquad (3)$$

и во втором случае

$$M_1 + m_2 = \rho_в(M_1/\rho_л) \qquad (4)$$

где $\rho_в$ и $\rho_л$ – плотности воды и льда соответственно.

Из (3) получаем $\quad M_0 = m_1/(\rho_в/\rho_л - 1). \qquad (5)$

Вычтем (3) из (4): $\quad \Delta M = (m_2 - m_1)/(\rho_в/\rho_л - 1). \qquad (6)$

Подставим (5) и (6) в (1):

$$t_1 = -\lambda(m_2 - m_1)/(c_л\, m_1) = -16{,}2^{0}\text{C}$$

Критерии оценивания

1)	Записано уравнение теплового баланса	**3 балла**
2)	Записаны условия плавания для 2 случаев (по 1 баллу)	**2 балла**
3)	Определена масса ΔM	**2 балла**
4)	Получен ответ в общем виде	**2 балла**
5)	Получен числовой ответ	**1 балл**

(при отсутствии знака «–» балл не ставить!)

Задача 5. Кольца Ауди. N одинаковых колец соединены так, что между всеми точками их пересечения обеспечен электрический контакт (места контактов отмечены жирными точками). Центры всех колец лежат на одной прямой (рис. 3). Какое сопротивление $R_Э$ покажет омметр, подключенный к точкам A и B этой цепи, если при подключении к диаметрально противоположным точкам одного кольца он показывает сопротивление R_0? Считать $N > 3$.

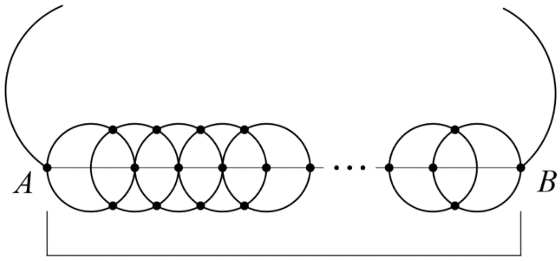

Рис. 3

Возможное решение (1)

Если сопротивление одного кольца R_0, то сопротивление проводника, имеющего длину равную длине кольца, будет равно $R = 4R_0$. Тогда сопротивление проводника длиной равной трети и шестой части кольца будет равно $R/3$ и $R/6$ соответственно.

В силу симметрии схемы относительно оси, проходящей через узлы A и B, в цепи не будет токов, идущих из верхней половины цепи в нижнюю (и наоборот). Следовательно, все центральные узлы можно разъединить вдоль оси, проходящей через A и B. Тогда схема может быть сведена к набору последовательных и параллельных участков, состоящих из резисторов сопротивлениями $R/3$ и $R/6$. Верхняя половина упрощенной схемы приведена на рис 4.

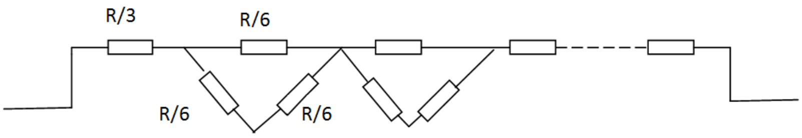

Рис. 4

Тогда сопротивление верхней/нижней части системы, состоящей из N колец, равно:

$$R_{Э_{верх}} = \frac{R}{3} + (N-2)\frac{\frac{R}{6}\frac{R}{3}}{\frac{R}{6}+\frac{R}{3}} + \frac{R}{3} = 4\left(\frac{N+4}{9}\right)R_0,$$

а эквивалентное сопротивление всей цепи

$$R_Э = \frac{R_{Э_{верх}}}{2} = 2\left(\frac{N+4}{9}\right)R_0.$$

Критерии оценивания

1)	Выражены сопротивления участков кольца	**2 балла**
2)	Обоснован разрыв центральных узлов	**2 балла**
3)	Приведена упрощенная эквивалентная схема	**2 балла**
4)	Найдено сопротивление элементарного треугольника цепи	**2 балла**
5)	Найдено эквивалентное сопротивление всей цепи	**2 балла**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**

Возможное решение (2)

Если сопротивление одного кольца R_0, то сопротивление проводника, имеющего длину равную длине кольца, будет равно $R = 4R_0$. Тогда сопротивление проводника длиной равной трети и шестой части кольца будет равно $R/3$ и $R/6$ соответственно. Обозначим минимальный ток, текущий в ветвях за I, тогда в силу симметрии схемы относительно оси, проходящей через узлы A и B, и с учетом закона Ома, можно расставить токи, текущие в остальных ветвях схемы, как указано на рис. 5.

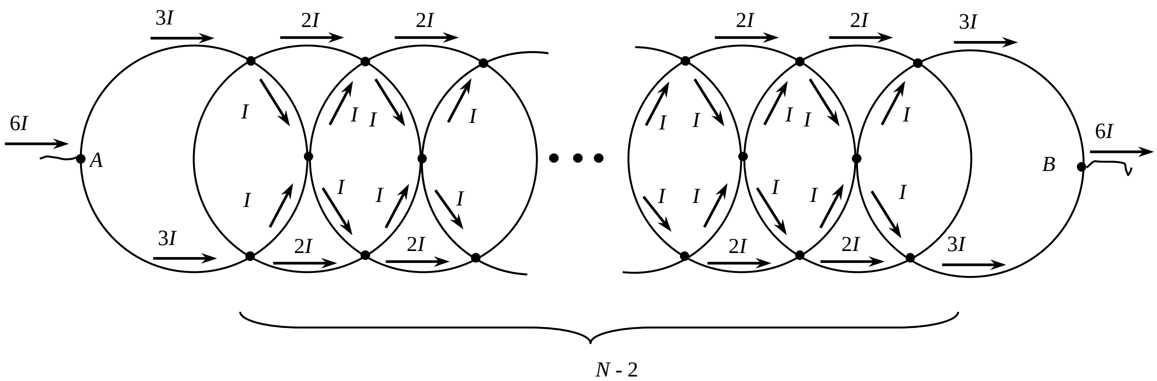

Рис. 5

Напряжение U между узлами A и B равно: $U = 3I\dfrac{R}{3} + (N-2)2I\dfrac{R}{6} + 3I\dfrac{R}{3} = IR\left(\dfrac{4+N}{3}\right)$,

а эквивалентное сопротивление всей цепи равно: $R_Э = \dfrac{U}{6I} = 2\left(\dfrac{4+N}{9}\right)R_0$.

Критерии оценивания

1)	Выражены сопротивления участков кольца	**2 балла**
2)	Расставлены токи с учетом симметрии и закона Ома	**4 балла**
3)	Выражено общее напряжение через токи и сопротивления ветвей	**2 балла**
4)	Найдено эквивалентное сопротивление	**2 балла**

18 января, на портале **http://abitu.net/vseros** *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **http://abitu.net/vseros**