

11 класс

Задача 1. Сообщающиеся сосуды. В двух одинаковых сообщающихся вертикальных цилиндрических сосудах находится жидкость плотности ρ . Первоначальный уровень жидкости в сосудах $l = 10$ см от дна (рис. 1). Сосуды соединены через отверстия в их дне маленькой трубкой пренебрежимо малого объема. В левом сосуде на высоте $2l$ от дна находится лёгкий поршень, который может свободно перемещаться без трения о стенки. Под поршнем находится

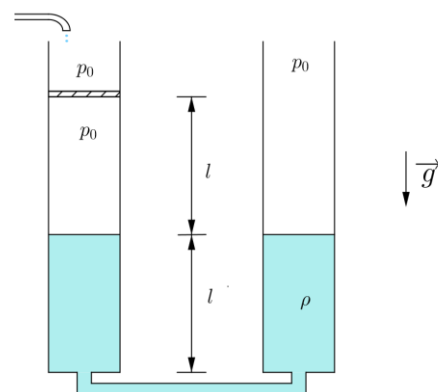


Рис. 1

воздух при атмосферном давлении $p_0 = 2\rho gl$. С момента

времени $t = 0$ в левый сосуд в пространство над поршнем начинает поступать жидкость плотности ρ , причем скорость прироста её уровня над поршнем составляет $v = 0,2$ мм/с.

- 1) С какой скоростью движется поверхность жидкости в правом сосуде в начале процесса?
- 2) С какой скоростью и в каком направлении (вверх или вниз) движется поверхность жидкости над поршнем в начале процесса?
- 3) На какой высоте от дна сосуда будет находится поверхность жидкости над поршнем
 - а) через 600 с?
 - б) через 1100 с?

Температуру в сосудах можно считать постоянной. Жидкость из сосудов не выливается.

Возможное решение (Аполонский А.). 1) Пусть через малое время Δt после начала поступления жидкости на поршень высота столба жидкости в правом цилиндре возросла на Δh . Из условия гидростатического равновесия в сосудах

$$p_0 + \rho g(l + \Delta h) = p_0 + \rho g v \Delta t + \rho g(l - \Delta h).$$

Из этого уравнения находим скорость поднятия жидкости в правой части сосуда в начале процесса:

$$v_{\text{п}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{v}{2}.$$

2) Пусть S – площадь поршня. Из закона Бойля-Мариотта

$$(p_0)S = (p_0 + \rho g v \Delta t)HS$$

найдем высоту H столба воздуха в левом сосуде:

$$H = \frac{l}{1 + \frac{\rho g v t}{p_0}} = \frac{l}{1 + \frac{v t}{2l}}.$$

Здесь t – время поступления жидкости в левый сосуд. Тогда поверхность жидкости над поршнем находится на высоте z от дна сосуда.

$$z(t) = (l - h) + H + vt = l - \frac{vt}{2} + \frac{l}{1 + \frac{\rho g v t}{p_0}} + vt = l + \frac{vt}{2} + \frac{l}{1 + \frac{vt}{2l}}. \quad (1)$$

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

При малых t высота

$$z(t) \approx \left(l + \frac{vt}{2}\right) + \left(l - \frac{vt}{2}\right) = 2l,$$

то есть в начале процесса скорость изменения высоты поверхности жидкости близка к нулю.

3а) Из формулы (1) следует. Что при $t = 600$ с искомая высота $z = 22,25$ см.

3б) Формальная подстановка даёт, что через $t = 1\ 100$ с в левом цилиндре под поршнем уровень жидкости опустится на $h = \frac{vt}{2} = 11$ см. Но, это больше l . Следовательно, к этому

времени вся вода из под поршня перетечет в правую часть, а воздух под поршнем "пробулькнет" и поршень опустится на дно.

Тогда высота поверхности жидкости над поршнем окажется $z = vt = 22$ см.

Критерии оценивания

1) Условие гидростатического равновесия	2 балл
2) Дан ответ к пункту 1 – (формула + число) 0.5 + 0.5 балла	1 балл
3) Записан закон Бойля-Мариотта	1 балл
4) Получено выражение для высоты поверхности жидкости от времени	2 балла
5) Дан ответ к пункту 2	1 балл
6) Дан ответ к пункту 3а)	1 балл
7) Указано, что воздух "пробулькивает" и поршень опускается на дно	1 балл
8) Дан ответ к пункту 3б)	1 балл

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

Задача 2. Стеклоподъёмники. При включении электродвигателя стеклоподъёмника одной двери автомобиля стекло поднимается из нижнего в верхнее положение за время t_1 . Если включить одновременно два стеклоподъёмника, то стекла поднимутся за время t_2 ($t_2 > t_1$).

- 1) За какое время t_3 поднимутся три стекла автомобиля при одновременной работе трёх стеклоподъёмников?
- 2) За какое время t_4 поднимутся все четыре стекла автомобиля при одновременной работе всех четырёх стеклоподъёмников.

Примечания. Считайте, что сила, необходимая для подъёма стекла, не зависит от скорости подъёма, а сила тяги F мотора стеклоподъёмника пропорциональна силе тока, идущего через него.

Решение (Гуденко А., Кармазин С.). Закон сохранения энергии при работе одного стеклоподъёмника:

$$IU = I^2(r + R) + sF / t_1.$$

Здесь U – ЭДС аккумулятора, r – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление обмотки электродвигателя, I – сила тока, необходимая для равномерного подъёма стекла и создающая необходимую силу тяги $F = \beta I$, β – коэффициент пропорциональности, s – перемещение стекла при подъёме.

При работе двух стеклоподъёмников сила тока, текущего через аккумулятор, в два раза больше и закон сохранения энергии выглядит так:

$$2IU = (2I)^2(r + R/2) + 2sF / t_2.$$

Для трёх стеклоподъёмников:

$$3IU = (3I)^2(r + R/3) + 3sF / t_2.$$

Для четырёх стеклоподъёмников:

$$4IU = (4I)^2(r + R/4) + 4sF / t_2.$$

Из первых трёх уравнений получаем:
$$\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1},$$

Откуда получаем
$$t_3 = \frac{t_1 t_2}{2t_1 - t_2}.$$

Аналогично:
$$t_4 = \frac{t_1 t_2}{3t_1 - 2t_2}.$$

Из уравнений видно, что при идеальном аккумуляторе ($r = 0$), все четыре уравнения выглядят одинаково и, соответственно, все времена подъёма также одинаковы.

18 января, на портале <http://abitunet/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitunet/vseros>

Критерии оценивания

- | | |
|--|-----------|
| 1. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме одного стекла | 2 балла |
| 2. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме двух стекол | 1 балл |
| 3. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме трёх стекол | 1 балл |
| 4. Записано уравнение закона сохранения энергии при подъеме четырёх стекол | 1 балл |
| 5. Получена связь на времена t_1, t_2, t_3 | 1,5 балла |
| 6. Получена связь на времена t_1, t_2, t_4 | 1,5 балла |
| 7. Найдено время t_3 | 1 балл |
| 8. Найдено время t_4 | 1 балл |

18 января, на портале <http://abit.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abit.net/vseros>

Задача 3. Зарядка-разрядка. В электрической цепи (рис. 1) все элементы можно считать идеальными. Конденсатор емкостью C не заряжен. ЭДС батареи задана. Ключ K замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда скорость изменения энергии, запасённой в конденсаторе, составляет 75% от максимальной.

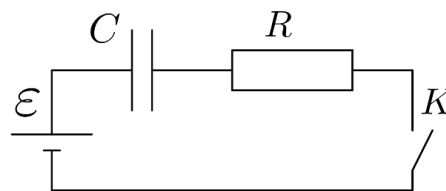


Рис. 1

Найдите количество теплоты, выделившееся в цепи при замкнутом ключе.

Возможное решение (Шеронов А.). Скорость изменения энергии конденсатора:

$$P = \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} I. \quad (1)$$

Здесь I – сила тока в цепи, q – заряд на конденсаторе.

Запишем закон Ома для цепи:

$$\mathcal{E} = IR + \frac{q}{C}. \quad (2)$$

Работа батареи идёт на зарядку конденсатора и на тепловые потери на резисторе:

$$\mathcal{E}I = P + I^2 R. \quad (3)$$

Максимум мощности достигается при силе тока $I = \frac{\mathcal{E}}{2R}$.

Из уравнения (2) найдём заряд на ёмкости:

$$q = C \left(\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2R} R \right) = \frac{C\mathcal{E}}{2}.$$

Из (1) найдём максимальную скорость изменения энергии:

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R}. \quad (4)$$

По условию в момент размыкания ключа $P = \frac{3}{16} \frac{\mathcal{E}^2}{R}$. (5)

Подставляя это выражение в уравнение (3) получим:

$$I^2 - \frac{\mathcal{E}}{R} I + \frac{3}{16} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение найдём:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2R} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2 - \frac{3}{16} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2} = \frac{\mathcal{E}}{2R} \pm \frac{\mathcal{E}}{4R}.$$

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{4R}; \quad I_2 = \frac{3\mathcal{E}}{4R}.$$

Из уравнения (2) найдём соответствующие заряды:

$$q_1 = \frac{3C\mathcal{E}}{4}; \quad q_2 = \frac{C\mathcal{E}}{4}.$$

Джоулево тепло, выделившееся на резисторе равно:

$$W = \left(q\mathcal{E} - \frac{q^2}{2C} \right).$$

Соответственно,

$$W_1 = \frac{24}{32}C\mathcal{E}^2 - \frac{9}{32}C\mathcal{E}^2 = \frac{15}{32}C\mathcal{E}^2; \quad W_2 = \frac{8}{32}C\mathcal{E}^2 - \frac{1}{32}C\mathcal{E}^2 = \frac{7}{32}C\mathcal{E}^2.$$

Таким образом, задача имеет два решения:

$$W_1 = \frac{15}{32}C\mathcal{E}^2; \quad W_2 = \frac{7}{32}C\mathcal{E}^2.$$

Критерии оценивания

- | | |
|--|---------|
| 1) Получена скорость изменения энергии конденсатора (1) | 1 балл |
| 2) Записан закон Ома для цепи (2) | 1 балл |
| 3) Найдена максимальная скорость изменения энергии конденсатора (4) | 1 балл |
| 4) Найдена мощность в момент размыкания ключа (5) | 1 балл |
| 5) Получено квадратное уравнение для соответствующей силы тока | 2 балла |
| 6) Найдены заряды на конденсаторе, при которых в цепи выделяется соответствующая теплота (по 1 баллу за каждый случай) | 2 балла |
| 7) Найдено соответствующее количество теплоты (по 1 баллу за каждый случай) | 2 балла |

18 января, на портале <http://abitru.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitru.net/vseros>

Задача 4. Долго ли умеючи? В глубинах вселенной вдали от всех тяготеющих масс находится тонкий однородный стержень длины $L = 10$ м и массой $M = 1,0$ кг. По нему без трения может скользить бусинка массой $m = 0,1$ кг. В начальный момент бусинка слегка смещена относительно центра стержня и система неподвижна. Через какое время τ она впервые достигнет середины стержня? Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

Решение (Валерий П.). В процессе колебаний центр масс системы тел будет оставаться неподвижным. Начало лабораторной системы отсчета OX поместим в центр масс. Подвижную систему отсчета OX_1 свяжем со спицей. В ЛСО ускорение бусинки при малом ее смещении x_1 относительно спицы определяется силой притяжения концевой отрезка спицы длиной $2x_1$ и расположенного на расстоянии $\approx L/2$ от бусинки:

$$a_{m,c} = \frac{F_x}{m} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{m(L/2)^2} = -\frac{8GM}{L^3}x_1.$$

Ускорение стержня при этом смещении бусинки

$$a_{M,c} = -\frac{F_x}{M} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{M(L/2)^2} = \frac{8Gm}{L^3}x_1.$$

Тогда ускорение a_m бусинки относительно стержня будет равно

$$a_m = a_{m,c} - a_{M,c} = -\frac{8G(M+m)}{L^3}x_1.$$

Получено уравнение гармонических колебаний бусинки относительно спицы. Период этих колебаний

$$T = 2\pi / \omega = \pi L \sqrt{\frac{L}{2G(M+m)}}.$$

Искомое время равно четверти периода гармонических колебаний

$$\tau = T / 4 \approx 2,0 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 24 \text{ суток}.$$

Решение (Гуденко А.). Известно, что период колебаний двух грузов m и M , связанной пружинкой с жёсткостью k , определяется точно также, как для одного грузика на пружинке, но только вместо массы груза нужно взять приведённую массу $\mu = \frac{mM}{m+M}$ (это выражение можно получить из уравнений движения).

Период колебаний груза на пружине равен $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}.$

В нашем случае «коэффициент жёсткости» $k = \frac{8GmM}{L^3}.$

Тогда период колебаний $T = \pi L \sqrt{\frac{L}{2G(M+m)}}.$

18 января, на портале <http://abitunet/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitunet/vseros>

Критерии оценивания

- | | |
|---|----------------|
| 1) Отмечено, что при смещении бусинки на x_1 сила притяжения определяется взаимодействием бусинки и части спицы длиной $2x_1$ | 1 балл |
| 2) Применён второй закон Ньютона (по 2 балла за каждый из случаев (для бусинки и для стержня)) | 4 балла |
| 3) Получено ускорение бусинки относительно стержня | 1 балл |
| 4) Получено выражение для периода колебаний | 2 балл |
| 5) Получен численный ответ | 2 балла |

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

Задача 5. Толстая линза. Вся поверхность плоского экрана, представляющего собой матовое стекло, освещается параллельным пучком лучей, направленным перпендикулярно экрану. Толстую линзу в виде половинки стеклянного шара расположили **перед** экраном так, что плоская поверхность линзы параллельна плоскости экрана (рис. 1). Показатель преломления стекла линзы $n = 2,0$. Диаметр линзы, меньше размеров экрана.

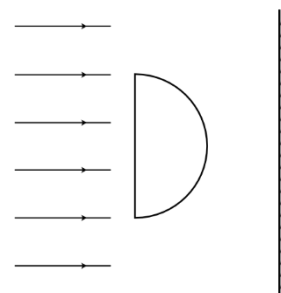


Рис. 1

- 1) Определите расстояние L_1 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина (рис. 2). Здесь пунктирные линии касаются внешней границы области с переменной освещённостью.
- 2) Определите расстояние L_2 от плоской поверхности линзы до экрана, если на экране наблюдается картина (рис. 3).

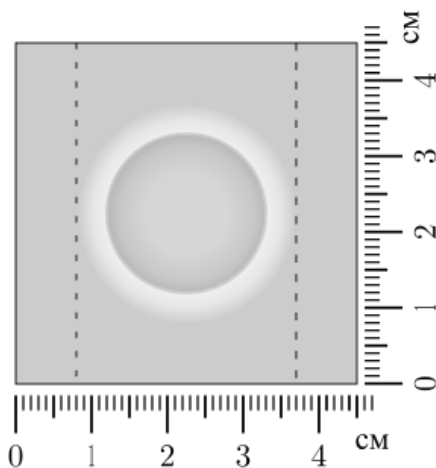


Рис. 2

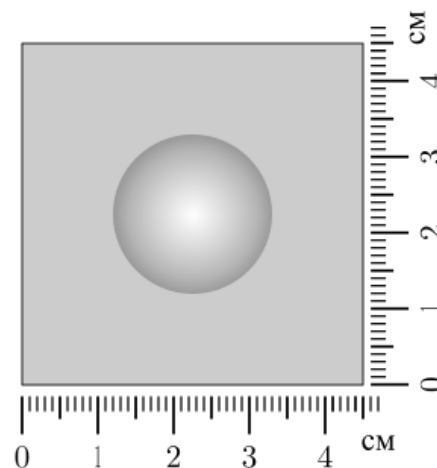


Рис. 3

Возможное решение (Варламов С., Карманов М.). Рассмотрим ход лучей в линзе. Плоскую границу линзы все лучи проходят без преломления. А вот из сферической поверхности выходят не все лучи. Часть из них испытывает полное отражение. Найдём предельный угол падения, при котором лучи перестают выходить за сферическую поверхность: $n \sin \alpha_{\text{пр}} = 1,0$. Отсюда $\alpha_{\text{пр}} = 30^\circ$.

Построим ход некоторых лучей. Из данной картинке (рис. 4) понятно, почему в первом случае мы наблюдаем на экране кольцо более яркое, чем вся поверхность экрана. Это кольцо создается как лучами, прошедшими мимо линзы, так и некоторыми лучами, прошедшими сквозь неё. При этом внешняя граница яркого кольца определяется как раз лучом, падающим на сферическую поверхность под предельным углом в 30° .

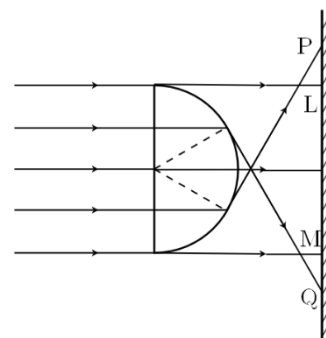


Рис. 4

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

Диаметр же темного центрального пятна равен диаметру линзы. Определим с помощью масштабной линейки внешний диаметр кольца $D = 2,90$ см и диаметр внутреннего темного круга $d = 2,10$ см.

Рассмотрим предельный луч.

Отмеченный угол равен 30° , $CD = \frac{d}{2} = R = 1,05$ см (рис. 5).

$$CE = \frac{D}{2} = 1,45 \text{ см.}$$

Пусть L – искомое расстояние, тогда $AB = L - R \cos \alpha_{\text{пр}}$.

$$BE = \frac{D}{2} + R \sin \alpha_{\text{пр}}.$$

$$\frac{AB}{BE} = \tan \alpha_{\text{пр}}.$$

В результате преобразований получим $L_1 = \frac{\frac{D}{2} \sin \alpha_{\text{пр}} + R}{\cos \alpha_{\text{пр}}} = 2,05$ см.

Во втором случае точки D и E должны совпасть. Тогда $D = d = 1,05$ см.

$$L_2 = R \frac{\sin \alpha_{\text{пр}} + 1}{\cos \alpha_{\text{пр}}} = 1,82 \text{ см.}$$

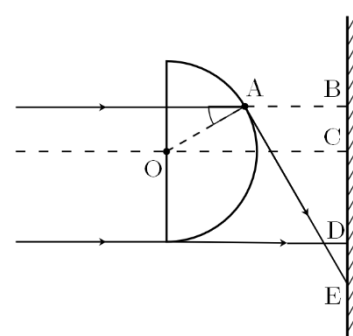


Рис. 5

Критерии оценивания

- | | |
|---|---------|
| 1) Понимание наличия полного внутреннего отражения для части лучей | 1 балл |
| 2) Определен предельный угол в 30 градусов | 1 балл |
| 3) Рисунок с ходом лучей, поясняющий образование на экране первой картинке. | 2 балла |
| 4) Показано, что диаметр темного пятна равен диаметру полушара. | 1 балл |
| 5) Записаны геометрические связи, позволяющие получить ответ. | 1 балл |
| 6) Получена формула для L в первом случае | 1 балл |
| 7) Верный численный ответ в первом случае | 1 балл |
| 8) Верный переход ко второму случаю | 1 балл |
| 9) Верный численный ответ во втором случае | 1 балл |

18 января, на портале <http://abitunet/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitunet/vseros>