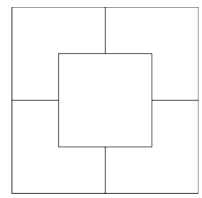
УСТНАЯ ОЛИМПИАДА 2015
6 КЛАСС

Решения

1. Том, Бен и Джон делали закупки на вечеринку. Том потратил 105$, Бен 125$, Джон 175$. Парни договорились сделать так, чтобы все потратили поровну. Поэтому Том отдал Джону некоторую сумму и Бен отдал Джону некоторую сумму. Сколько отдал Джону Том и сколько — Бен?

Ответ: Том 30$, Бен 10$.

Решение. Всего было потрачено 105 + 125 + 175 = 405$. Это означает, что каждый должен потратить по 135$. Значит, Том должен отдать 30$, а Бен 10$.



2. Площадь каждой L-образной фигуры (см. рисунок) 300 кв. ед., все фигуры одинаковые. 300 кв. ед. составляет 3/16 от всей площади. Найдите длину стороны центрального квадрата.

Ответ: 20 единиц.

Решение. Все 4 L-образные фигуры составляют 12/16 или 3/4 площади целого квадрата. Тогда центральный квадрат занимает 1/4 часть. Если ¾ части это 1200 кв. ед., то ¼ часть – 400 кв. ед. Но тогда длина стороны квадрата равна 20 ед. (20·20=400).

3. На круговой арене длиной 300 метров из одного места в разных направлениях стартуют два смешарика: Ёжик со скоростью 100 м/мин и Крош со скоростью 200 м/мин. Каждый раз, когда они оказываются в одном месте, Крош разворачивается и начинает бежать в противоположном направлении. Встретятся ли хоть раз смешарики в точке старта? Если да, то через какое время после старта это случится впервые, если нет, то объясните, почему.

Ответ: да, через 9 минут.

Решение. Пусть смешарики стартуют из точки А, а точки В и С находятся на расстоянии соответственно 100 и 200 метров от старта по направлению первоначального движения Ёжика. Тогда первая встреча смешариков произойдёт в точке В через минуту после начала движения (300 метров, скорость сближения 100 + 200 м/мин). После этого скорость их сближения станет 200 – 100 = 100 м/мин, а расстояние вновь станет 300м. Поэтому они встретятся через три минуты снова в точке В. После этого опять расстояние станет равным 300 метров, а скорость сближения 300 м/мин, поэтому они встретятся через минуту в точке С. Аналогично, через 3 минуты снова произойдёт встреча в С, а ещё через минуту — в А. Итого, пройдёт 1 + 3 + 1 + 3 + 1 = 9 минут.

4. На собеседование в школу прорицателей явилось 13 человек. Они сели по кругу и предсказали результаты собеседования. Каждый из них умолчал о результатах себя и двух своих соседей, а про остальных сказал, что они не сумеют успешно пройти это собеседование. В итоге оказалось, что собеседование успешно прошли те и только те кандидаты, кто сделал верное предсказание о его результатах. Сколько абитуриентов успешно прошло собеседование? Укажите все варианты и докажите что других нет.

Ответ: 2.

Решение. Предположим, никто не прошёл собеседование. Но тогда любой (произвольный) человек сделал верное предсказание, ведь остальные не прошли. Получаем противоречие.

Значит, есть хотя бы один прошедший. Рассмотрим его. Он сделал верное предсказание, так что мы знаем, что кроме него и его соседей все остальные точно не прошли. Рассмотрим правого соседа. Если он сделал верное предсказание, то он прошёл, и это значит, что левый сосед первого прошедшего не прошёл (в силу верного предсказания правого соседа). Если же правый сосед сделал неверное предсказание, то он не прошёл, но это означает, что прошёл левый сосед. Так что в любом случае прошло 2 человека. Легко проверить, что все условия в любом из двух вариантов, когда верно предсказали только самый первый рассмотренный человек и один его сосед, выполнены.

5. Сколько решений имеет ребус: Б + Е + Л + К + А = 15, если гласные имеют одну чётность, а согласные — другую? (Разные буквы — разные цифры).

Ответ: 60 вариантов.

Решение. Имеем две гласных и три согласных и нечётную сумму. Это означает, что согласные — нечётные цифры, гласные — чётные. Пусть Б, Л, К = 1, 3, 5. В этом случае сумма уже равна 9, а две гласных (различные чётные цифры) в сумме должны давать 6. Это возможно в четырёх случаях: если одна цифра 6, а другая — 0 (и наоборот), либо одна цифра 2, а другая — 4 (и наоборот). Также, для каждого из этих четырёх вариантов, существует шесть перестановок из цифр 1, 3, 5. Итого, с такими согласными 6·4 = 24 варианта.

Пусть Б, Л, К = 1, 3, 7 или 1, 3, 9 или 1, 5, 7. Тогда сумма равна 11 и 13 соответственно, и на гласные остаётся в сумме 4 и 2 соответственно. Тогда в первом случае Е = 4, А = 0 либо Е = 0, А = 4, а во втором — Е = 2, А = 0 и наоборот. Тогда в каждом из этих случаев получается по 2·6 = 12 вариантов. В сумме ещё 36. Если же брать 1, 5, 9 или 1, 7, 9, то сумма получается не меньше 15. Сумма трёх различных нечётных чисел, больших 1, также не меньше 15 (так как она больше или равна 3 + 5 + 7 = 15). Но в таком случае, учитывая, что гласные различны, получим сумму всех цифр бОльшую 15. Таким образом, имеем 24 + 36 = 60 вариантов.

6. В чашке Петри живут несколько амёб, бактерий и вирусов. Некоторые из них дружат между собой, причём дружба взаимна. Каждая бактерия дружит с тремя амёбами и шестью вирусами. Каждая амёба дружит с двумя бактериями, а каждый вирус дружит с пятью бактериями. Также если бы вирусов было на 8 больше, то каждая амёба дружила бы с 4 вирусами, а каждый вирус с тремя амёбами. Сколько амёб, бактерий и вирусов в чашке?

Ответ: бактерий 10, амёб 15, вирусов 12.

Решение. Запишем соотношения в символическом виде: число дружб (А-Б) – это 2А = 3Б, число дружб (Б-В): 6Б = 5В, число дружб (А-В) в последнем условии: 4А = 3(В+8). Подставим Б в третье уравнение вместо А и В: 6Б = 3(1,2Б + 8). Решим это уравнение и найдём Б = 10, затем найдём А = 15 и В = 12.

7. Барон Мюнхгаузен рассказал такую историю: «Пришлось мне как-то заночевать в домике на болотах, и никак я заснуть не мог — столько комаров налетело! И вот принялся я их убивать. Хлопну своей треуголкой — каждый раз 209 комаров прихлопну! А хлопну дверью — сразу 500! Правда, в этот момент в открытую дверь 797 залетало! Но всё же, в конце концов, я справился и прихлопнул всех комаров до единого! А ведь исходно их 2015 было!». Мог ли барон сказать правду? (Если “да”, приведите пример, если “нет” — объясните, почему).

Ответ: нет.

Решение. Если барон хлопал треуголкой, он убивал 209 комаров. Если же хлопал дверью, то на самом деле комаров прибавлялось 297. Пусть он n раз хлопнул дверью и m раз треуголкой и убил всех комаров. Тогда должно получиться:

2015 + 297·n – 209·m = 0 или 2015 + 297·n = 209·m. Разложим 209 на множители: 11·19. Значит, 2015 + 297·n = 11·19·m. Но 297 тоже делится на 11. Значит, чтобы сумма делилась на 11, если одно из слагаемых делится, то и второе должно делиться. Значит, 2015 должно делиться на 11, а оно не делится.

8. 99 рыцарей короля Артура выстроились в один ряд. У каждого из них на голове одет красный или синий колпак, причём у 50 рыцарей колпаки красные, а у 49 — синие. Каждый рыцарь подсчитал разность между количеством красных колпаков, расположенных справа от него, и количеством синих колпаков, расположенных слева от него, а затем сообщил результат Мерлину. Узнав все 99 разностей, Мерлин сложил их. Какой результат у него получился?

Ответ: 49.

Первое решение. Если все «красные» рыцари расположены в ряду слева, а все «синие» — справа, то красные рыцари назовут числа 49, 48, … , 1, 0 (слева направо), а синие рыцари назовут числа 0, –1, –2, … –48. В этом случае сумма всех чисел равна 49. Остаётся заметить, что произвольное расположение цветов рыцарей получается из только что описанного последовательными перестановками пар соседних рыцарей вида КС (после перестановки такая пара превращается в СК, а цвета остальных рыцарей не меняются). Очевидно, что при каждой такой замене сумма всех чисел не изменяется: у первого рыцаря из пары число уменьшается на 1, у второго — возрастает на 1, у всех остальных рыцарей числа не изменяются.

Второе решение. Каждый рыцарь назвал разность вида *R*–*L*. Если сложить числа *R* у всех рыцарей, то в этой сумме будут по разу учтены все пары рыцарей (не обязательно стоящих рядом), в которых правый рыцарь – красный, т.е. все пары вида КК и СК. Если же сложить все числа *L*, то по разу будут учтены все пары, где левый рыцарь — синий, т.е. все пары вида СК и СС. Отсюда сумма, полученная Мерлином, равна КК+СК–СК–СС = КК–СС. Так как КК — это число всех пар красных рыцарей, которое равно $\frac{50\times 49}{2} = 25 \cdot 49$, а СС — это число всех пар синих рыцарей, равное $\frac{49\times 48}{2} = 24 \cdot 49$, то общая сумма равна КК–СС=49.