УСТНАЯ ОЛИМПИАДА 2015
8 КЛАСС

Решения

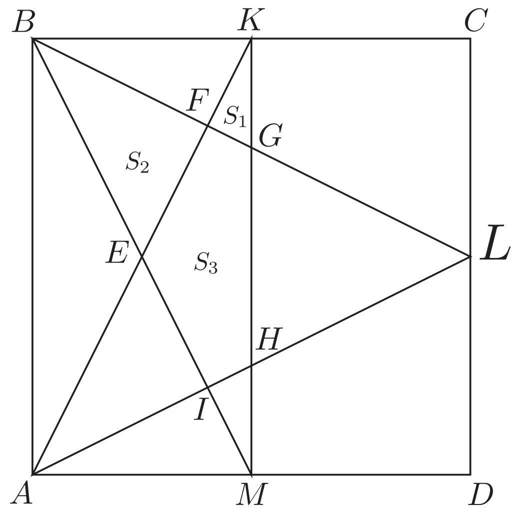
1. Расставьте между цифрами 123456789 знаки арифметических действий +, -, × так, чтобы в итоге получилось число 101. Склеивать цифры можно, использовать скобки нельзя.
Решение. $123 - 4\times 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = 101$. Возможны и другие примеры.

2. Шесть семиклассников на городской олимпиаде по математике в сумме решили 25 задач. Сколько задач решил каждый из них, если известно, что один из них решил в два раза больше задач, чем другой? На олимпиаде было 5 задач.
Ответ: шестиклассники решили по 2, 4, 4, 5, 5 и 5 задач.
Решение. Пусть для определённости первый решил в два раза больше, чем второй из семиклассников. Поскольку задач было всего 5, значит, первый решил или 4, или 2, или 0 задач (тогда второй соответственно или 2, или 1, или 0). Если бы первый решил меньше 4 задач, тогда суммарно первый и второй решили бы не больше 3 задач. Тогда, если даже оставшиеся 4 шестиклассника решили все 5 задач, итого будет менее 25 задач. Значит, первый решил 4 задачи, второй — две. Оставшиеся четверо шестиклассников решили вместе $25 - 4 - 2 = 19$ задач. Такой расклад говорит о том, что трое из них решили по 5 задач, а один решил 4.

3. Алексей Николаевич выехал на машине из городка A в город N, находящийся от него в 25 км. Он ехал со скоростью 75 км/ч, но на каждом светофоре останавливался и ждал от 35 до 40 секунд. В итоге его средняя скорость на пути из A в N составила 60 км/ч. Сколько светофоров встретилось на пути Алексея Николаевича?
Ответ: 8 светофоров.
Решение. Из условия следует, что общее время, проведённое Алексеем Николаевичем (далее АН) в пути, равно 25:60 ч = 25 мин, а время его движения без учёта ожидания на светофорах равно 25:75 = 1/3 ч = 20 мин. Следовательно, на светофорах АН простоял всего $25 - 20 = 5$ мин = 300 сек. Так как 300:8 = 37.5, то число светофоров могло быть равно 8, если на каждом из них АН простоял 37.5 сек (к примеру). Если бы светофоров было меньше восьми, то общее время ожидания составило бы не больше $7\cdot 40 = 280 < 300$ сек, а если бы светофоров было больше восьми, то время ожидания было бы не меньше $9\cdot 35 = 315 > 300$ сек. Значит, АН на своём пути из A в N встретил ровно 8 светофоров.

4. Дан квадрат ABCD со стороной 1. Вершину A соединили отрезками с серединами сторон BC и CD, а B соединили отрезками с серединами сторон CD и AD. Найдите площадь четырёхугольника, образованного точками пересечения этих отрезков.
Ответ: 9/40.
Решение. Соединим точки K и M — середины сторон BC и AD, тогда отрезок KM пересечёт BL в точке G, а AL — в точке H. Искомая площадь равняется $S_{GLH} + S_{EFGHI}$ ($=S_3$). Поскольку GH — средняя линия треугольника ABL, поэтому площадь треугольника GLH равна четверти площади треугольника ABL, т.е. 1/8. Площадь треугольника KEM равна, с одной стороны, 1/8, с другой стороны, это $2S_1 + S_3$, т.е. $1/8 = 2S_1 + S_3$ (1). Из того, что $S_{ABE} = 1/8$, $KG = 1/4$ и треугольник KFG подобен треугольнику ABF с коэффициентом 1/4,

находим 16 S_1= S_2 + 1/8 (2). Из равенств $S_{BFK} + S_2 = S_{BEK} = 1/8$, $S_{BFK} + S_1 = S_{BGK} = 1/16$ вычитанием вычисляем $S_2 = S_1 + 1/16$. Подставляя это выражение в равенство (2), находим $S_1 = 1/80$. Тогда из равенства (1) находим $S_3 = 1/10$. Искомая площадь равна 1/8+1/10=9/40.



5. На столе лежат 9 монет, среди которых ровно две фальшивые, на вид неотличимые от настоящих. Известно, что настоящие монеты весят по 2 г., а одна фальшивая — 1 г., вторая фальшивая — 3 г. Можно ли при помощи чашечных весов за 5 взвешиваний обнаружить обе фальшивые монеты?

Ответ: да.

Решение. Будем обозначать цифрами номера монет. Взвесим сначала 1 и 2.

Случай 1. Неравенство. Тогда одна или обе из монет фальшивые. Взвесим 3,4,5 и 6,7,8.

Случай 1.1. Равенство. Тогда 3-8 монеты — настоящие, сравнивая 3 и 9, а затем 3 и 1, найдём обе фальшивые.

Случай 1.2. Неравенство. Тогда девятая монета — настоящая, а среди 1-2 и 3-8 по одной фальшивой. Сравнивая 9 и 1, находим первую фальшивую. Тогда мы узнаем, на какой чаше была фальшивая среди 3-8. Сравнивая любые две монеты с этой чаши, найдём вторую фальшивую.

Случай 2. Равенство. Тогда обе монеты настоящие. Взвесим 3,4,5 и 6,7,8.

Случай 2.1. Равенство. Тогда на одной из чаш лежат обе фальшивые монеты. Сравним сначала две любые монеты с одной из чаш. Если они равны, то обе настоящие, значит, обе фальшивые на другой чаше. Если не равны (пусть 3 > 4), то сравним 1 и 5, узнаем, сколько весит 5, отсюда определим, какими монетами являются 3 и 4.

Случай 2.2. Неравенство. Сравним 1 и 9.

Случай 2.2.1. Равенство. Тогда 9 настоящая, а среди 3,4,5 и 6,7,8 по одной фальшивой, причём известно, где какая. Сравнивая 3 и 4, найдём первую фальшивую, а затем 6 и 7 — вторую.

Случай 2.2.2. Неравенство. Тогда 9 фальшивая, отсюда известно, на какой чаше на предыдущем шаге фальшивая, сравнивая две любые монеты оттуда, находим вторую фальшивую монету.

6. Найдите все простые числа p и q такие, что pq + 74 делится на p + q.

Ответ: (p,q) = {(2,3), (2,5), (3,2), (5,2)}.

Решение. Если p и q оба нечётны, тогда pq + 74 нечётно, а p + q чётно, но нечётное число не может делится на чётное. Значит, хотя бы одно из чисел p и q равно 2, поскольку все простые числа либо нечётны, либо равны 2. Не теряя общности, будем считать, что p = 2. Тогда условие задачи принимает вид: 2q + 74 = 2(q + 37) делится на q + 2. Легко проверить, что q = 2 не подходит, значит, q нечётно. Тем самым, и q + 2 нечётно и поэтому q + 37 обязано делиться на q + 2. Значит, и (q+37) – (q+2) = 35 делится на q + 2. Число 35 имеет делителями числа 1, 5, 7 и 35. Рассмотрим варианты: 5 = q + 2 влечёт q = 3, 7 = q + 2 влечёт q = 5, а варианты 1 или 35 = q + 2 не подходят.

7. В лотерее используются 20 шаров, пронумерованных от 1 до 20. Играющий заполняет карточку, где указывает 4 номера. В розыгрыше 5 шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек нужно заполнить, чтобы среди них вне зависимости от результатов розыгрыша гарантированно оказалась хотя бы одна выигрышная?
Ответ: потребуется 8 карточек.
Решение. Далее слова “выбираем число” подразумевают, что мы играем за Судьбу, которая выбирает нам номера для проигрыша. Приведём пример на 8 карточек: заполняем на карточках следующие номера:

1, 2, 3, 4,	1, 2, 5, 6,	3, 4, 5, 6,	7, 8, 9, 10,
7, 8, 11, 12,	9, 10, 11, 12,	13, 14, 15, 16,	17, 18, 19, 20.

Легко видеть, что для того, чтобы сделать первые три карточки проигрышными, требуется хотя бы два номера, вторые три — ещё два других номера, и последние две — ещё два, то есть пяти шаров будет недостаточно, чтобы сделать все эти 8 карточек проигрышными.

Предположим, что мы можем обойтись 7 карточками. Тогда на них будет отмечено $7 \cdot 4 = 28$ чисел (с повторениями). Если хотя бы одно число будет участвовать в трёх карточках, то выбирая его, а затем по одному любому числу из четырёх оставшихся карточек, мы проиграем, если выпадут эти числа. Далее считаем, что любое число встречается максимум в двух карточках.
Выберем любое такое число (хотя бы одно такое число найдётся, поскольку 28 > 20). На оставшихся пяти карточках будет отмечено хотя бы 28 – 7 = 21 число, учитывая повторения (максимум две пересекающиеся карточки могли занимать 7 чисел). С другой стороны, если бы все числа на пяти карточках были различны, то их было бы 20. Поэтому среди оставшихся пяти карточек найдётся число, записанное на двух. Выберем его, а с оставшихся трёх карточек выберем по произвольному числу. Тогда мы проиграем.

8. Сизиф и Геракл играют в следующую игру. Перед ними лежат кучки из камней, они по очереди выбирают две кучки и берут из них камни (из каждой кучки нужно взять не менее одного камня). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит, если первый ход делает Сизиф и вначале на земле лежат кучки из 1, 2015, 2016, 2016 и 2016 камней?
Ответ: Сизиф.
Решение. Сперва отдельно разберём случай 4 кучек камней. Покажем, что в этом случае побеждает тот игрок, после хода которого в трёх кучках будет одинаковое число камней X, а в четвёртой кучке $Y \geq X$ камней (назовём этого игрока И1, а ситуацию *). Тогда его соперник И2 точно уменьшит количество камней хотя бы в одной из кучек с X камнями (но не более, чем в двух из таких кучек). Возможны два основных расклада по числу камней в кучках после хода И2: (a, X, X, b) при $a<X, X \leq b$ или (a, b, X,Y) при $a \leq b \leq X,Y$

(причём $a<X$). Тогда И1 в первом варианте убирает по X-a камней из двух средних кучек и получается опять вариант из (a, a, a, b) камней при $a<b$. Во втором варианте при $a<b$ И1 делает тоже самое и получает кучки из (a, a, a, Y) камней при $a<Y$. При $a=b$ И1 уменьшает кучки из X и Y камней до уровня $a=b$, получатся четыре равные кучки с a камнями. Тем самым, И1 способен всё время поддерживать расклад * после своего хода. Заметим, что проиграет тот игрок, кто опустошит хотя бы одну кучку, тогда его соперник своим ходом из оставшихся 2 или 3 кучек убирает ровно 2 кучки и побеждает в силу невозможности хода оппонента. Поддержание положения * гарантирует И1 то, что именно И2 первым опустошит хотя бы одну из четырёх кучек, потому что во всех разобранных выше случаях число камней в минимальной кучке при ходе И1 не меняется, а при ходе И2 уменьшается.

Вернёмся к случаю из 5 кучек. Сизиф побеждает благодаря следующей стратегии. Первым ходом он делает кучки по 1, 2014, 2015, 2015 и 2016 камней. Общая цель Сизифа иметь после своего хода на земле кучки из $(1, X, X+1, X+1, Y)$ камней при $X+1\leq Y$ камней (при чётном X, обозначим такую ситуацию **). Если Геракл своим ходом опустошит кучку из 1 камня, то он не сможет создать ситуацию * и тем самым проиграет. Если после хода Геракла будут кучки $(1, X, X, X, Z)$ камней, $X<Z$, то Сизиф, беря кучку из 1 камня и Z-X камней из кучки с Z камнями, получает ситуацию * и побеждает. Значит, Геракл не будет трогать кучку из 1 камня, но обязательно получит после своего хода помимо единичной кучки и кучку из $a<X$ камней. Если кучек с a камнями окажется не меньше двух, тогда Сизиф, своим ходом убирая кучку с 1 камнем и уменьшая в одной из кучек число камней до a, приходит к * и побеждает. Тогда в оставшемся варианте, когда Геракл своим ходом получит ровно одну не совпадающую с единичной кучку из a камней (при этом может быть $a=1$), есть два случая: 1) $a=X-1$, т.е. будут на земле кучки из $(1, X-1, b, c, d)$ камней при $X-1 < b, c, d$ (тогда Сизиф переходит к ситуации $(1, X-2, X-1, X-1, Y)$ камней, $X-1<Y$, т.е. **); 2) либо $a<X-1$ (тогда Сизиф при чётном a добивается кучек $(1, a, a+1, a+1, b)$ при $a+1<b$, а при нечётном a — кучек $(1, a-1, a, a, b)$ при $a<b$). Поддержание положения ** гарантирует Сизифу победу, потому что если Геракл первым опустошит одну из пяти кучек камней, тогда или останется всего три кучки камней (тогда Сизиф полностью забирает две кучки и побеждает), или останется четыре кучки, но не в положении * (тогда Сизиф своим ходом добивается * и побеждает). Если же по описанной стратегии Сизиф первым опустошит одну из кучек камней, тогда это произошло в ситуации с $(1, 1, 1, 1, b)$ камнями при $1<b$ и после ходя Сизифа осталось $(1, 1, 1, b)$ камней (положение *) и Сизиф побеждает.