УСТНАЯ ОЛИМПИАДА 2015
7 КЛАСС

Решения

1. Расставьте между цифрами 123456789 знаки арифметических действий +, –, × так, чтобы в итоге получилось число 101. Склеивать цифры можно, использовать скобки нельзя.
Ответ: $1 + 2\times3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8\times9 = 101$ (один из возможных вариантов).

2. На Острове Невезения живут рыцари, лжецы и хитрецы. Лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду, хитрецы говорят правду, за исключением случаев, когда они оказываются в компании, где лжецов больше, чем рыцарей. Собралась компания из 12 аборигенов. Каждый из них сказал про остальных, что среди них 3 или 4 рыцаря. Сколько рыцарей, лжецов и хитрецов в этой компании, если известно, что там есть представители всех трёх племён?
Ответ: 5 рыцарей, 6 лжецов и 1 хитрец.
Решение. По условию в компании есть хотя бы по одному рыцарю, лжецу и хитрецу. Поскольку рыцарь сказал правду, то всего рыцарей в компании 4 или 5. Так как лжец солгал, то рыцарей не может быть 4, поэтому их 5. Следовательно, хитрец солгал, а значит лжецов в компании больше, чем рыцарей. Так как всего в компании 12 человек, то число лжецов равно 6, а число хитрецов равно 1.

3. На круговой арене длиной 300 метров из одного места в разных направлениях стартуют два смешарика: Ёжик со скоростью 100 м/мин и Крош со скоростью 200 м/мин. Каждый раз, когда они оказываются в одном месте, Крош разворачивается и начинает бежать в противоположном направлении. Встретятся ли хоть раз смешарики в точке старта? Если да, то через какое время после старта это случится впервые, если нет, то объясните, почему.
Ответ: да, через 9 минут.
Решение. Пусть смешарики стартуют из точки A, а точки B и C находятся на расстоянии соответственно 100 и 200 метров от старта по направлению первоначального движения Ёжика. Тогда первая встреча смешариков произойдёт в точке B через минуту после начала движения (300 метров, скорость сближения 100 + 200 м/мин). После этого скорость их сближения станет 200 – 100 = 100 м/мин, а расстояние вновь станет 300м. Поэтому они встретятся через три минуты снова в точке B. После этого опять расстояние станет равным 300 метров, а скорость сближения 300 м/мин, поэтому они встретятся через минуту в точке C. Аналогично, через 3 минуты снова произойдёт встреча в C, а ещё через минуту — в A. Итого, пройдёт 1 + 3 + 1 + 3 + 1 = 9 минут.

4. Эллочка-Людоедка загадала положительное число. Если это число умножить на 2016, то получится целое число. Если же загаданное число умножить на 2015, то получится число, у которого целая часть в 2016 раз больше, чем у исходного числа, а дробная часть в 2015 раз меньше, чем у исходного числа. Какое число загадала Эллочка-Людоедка?
(*Целая часть числа — это наибольшее целое число, его не превосходящее. Дробная часть числа — это разность между числом и его целой частью. Например, у числа* $13\frac{4}{7}$ *целая часть равна 13, дробная часть равна 4/7.*)

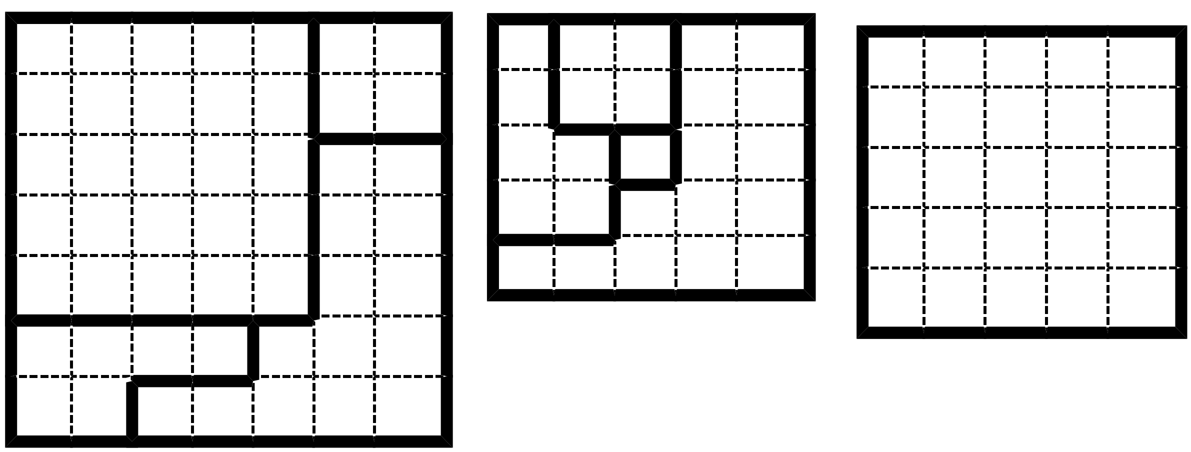
Ответ: $2014\frac{2015}{2016}$.

Решение. Из второго условия следует, что загаданное число не является целым. Из первого условия находим, что оно имеет вид $x+{}^{y}\!/_{2016}$, где x и y — натуральные числа, y < 2016. Теперь второе условие описывается уравнением $2015\left(x+{}^{y}\!/_{2016}\right)=2016x+\left({}^{y}\!/_{2016}\right)/2015$. Оно преобразуется к виду $2015x = 2014y$. Отсюда получаем, что y делится на 2015, а поскольку y < 2016, то y = 2015, x = 2014. Проверкой убеждаемся, что полученное число $2014\frac{2015}{2016}$ удовлетворяет всем требованиям задачи.

5. На какое минимальное число частей надо разрезать квадрат 7×7 клеток, чтобы из этих частей и ещё одного квадратика в 1 клетку можно было составить два квадрата 5×5 клеток? Все разрезы делаются по линиям клеток.

Ответ: на 4 части.

Решение. Если квадрат 7×7 разрезать на три части, то какие-то две его угловые клетки окажутся в одной части, и эту часть невозможно будет разместить внутри квадрата 5×5. Пример разрезания на четыре части показан на рисунке. (Это один из примеров, возможны другие примеры!)



6. 99 рыцарей короля Артура выстроились в один ряд. У каждого из них на голове одет красный или синий колпак, причём у 50 рыцарей колпаки красные, а у 49 — синие. Каждый рыцарь подсчитал разность между количеством красных колпаков, расположенных справа от него, и количеством синих колпаков, расположенных слева от него, а затем сообщил результат Мерлину. Узнав все 99 разностей, Мерлин сложил их. Какой результат у него получился?

Ответ: 49.

Первое решение. Если все «красные» рыцари расположены в ряду слева, а все «синие» — справа, то красные рыцари назовут числа 49, 48, … , 1, 0 (слева направо), а синие рыцари назовут числа 0, –1, –2, … –48. В этом случае сумма всех чисел равна 49. Остаётся заметить, что произвольное расположение цветов рыцарей получается из только что описанного последовательными перестановками пар соседних рыцарей вида КС (после перестановки такая пара превращается в СК, а цвета остальных рыцарей не меняются). Очевидно, что при каждой такой замене сумма всех чисел не изменяется: у первого рыцаря из пары число уменьшается на 1, у второго — возрастает на 1, у всех остальных рыцарей числа не изменяются.

Второе решение. Каждый рыцарь назвал разность вида *R*–*L*. Если сложить числа *R* у всех рыцарей, то в этой сумме будут по разу учтены все пары рыцарей (не обязательно стоящих рядом), в которых правый рыцарь – красный, т.е. все пары вида КК и СК. Если же сложить все числа *L*, то по разу будут учтены все пары, где левый рыцарь — синий, т.е. все пары вида СК и СС. Отсюда сумма, полученная Мерлином, равна КК+СК–СК–СС = КК–СС. Так как КК — это число всех пар красных рыцарей, которое равно $\frac{50\times49}{2}$ =25·49, а СС — это число всех пар синих рыцарей, равное $\frac{49\times48}{2}$ = 24·49, то общая сумма равна КК–СС=49.

7. В лотерее используются 22 шара, пронумерованные от 1 до 22. Играющий заполняет карточку, где указывает 4 номера. В розыгрыше 5 шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек нужно заполнить, чтобы среди них вне зависимости от результатов розыгрыша гарантированно оказалась хотя бы одна выигрышная?

Ответ: 7 карточек. **Решение.** Если заполнить не более пяти карточек, то на каждой из них может оказаться по неудачному номеру. Если заполнено 6 карточек, то на них записано 6×4 = 24 числа, а различных номеров всего имеется 22, поэтому найдётся номер, который указан хотя бы на двух карточках. Этот номер может быть неудачным, что делает проигрышными обе содержащие его карточки. На остальных 4 карточках может оказаться ещё по одному неудачному номеру. Значит, заполнив 6 карточек, гарантировать выигрыш нельзя. Приведём пример выигрышного набора из 7 карточек. Первые три карточки: (1,2,3,4); (1,2,5,6); (3,4,5,6). На остальных четырёх карточках распределены номера от 7 до 22 в любом порядке, без повторений. Первые три карточки будут проигрышными, только если среди чисел 1, 2, …, 6 есть хотя бы два неудачных. Но тогда среди чисел от 7 до 22 имеется не более трёх неудачных, а это значит, что одна из последних четырёх карточек является выигрышной (поскольку числа на этих карточках не повторяются).

8. Принцесса и Медведь играют в следующую игру. Из кучи, где в начале находится 1000 камней, они по очереди забирают либо 1 камень, либо половину имеющихся камней. При этом если число камней в куче нечётное, то при делении на 2 оно округляется в большую сторону (то есть из кучи в $2k+1$ камней можно взять 1 или $k+1$ камней). Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Начинает Принцесса. Кто из игроков может гарантировать себе победу при правильной игре?

Ответ: Медведь. **Решение.** Заметим, что если перед ходом игрока число N камней в куче делится на нечётную степень двойки (в частности, N чётное), то после хода оно обязательно будет делиться на чётную степень двойки: если при ходе куча делится пополам, то эта степень уменьшается на единицу, а если забирается один камень, то в куче остаётся нечётное число камней $N–1$, куда двойка входит в нулевой степени. Если же перед ходом игрока N делится на чётную степень двойки, то своим ходом он может добиться того, чтобы оно стало делиться на нечётную степень двойки: если N чётное, то достаточно поделить кучу пополам, а если $N = 2k+1$, то в результате хода можно оставить в куче k либо $2k$ камней, а какое-то из этих чисел содержит двойку в нечётной степени. Поскольку первоначальное $N = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$ делится на нечётную степень двойки, и первой ходит Принцесса, то Медведь выигрывает, оставляя в куче после своих ходов число камней, делящееся на нечётную степень двойки, и получая перед своими ходами число камней, делящееся на чётную степень двойки (отсюда следует, что если в куче остался $1 = 2^0$ камень, то очередь хода за Медведем, и, забирая последний камень, он выигрывает).